

**VIII городской чемпионат по математическим боям****«Бои по правилам» (1/4 финала)**

1. Доказать тождество:  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ , если  $a + b + c = 0$ .
2. Петя в конце четверти выписал подряд в строчку свои текущие оценки по физике и поставил между некоторыми из них знак ( $\cdot$ ). Произведение получилось равным 2007. Какая оценка выходит за четверть у Пети? («колов» учитель физики не ставит)
3. Три бригады начали одновременную пахоту. Установленная планом ежедневная норма первой бригады так относится к норме второй бригады, как 5 : 4, а второй к третьей, как 2 к 1,5. Первая бригада увеличила ежедневную норму на 10 %, вторая на 20 %, а третья, как и первая, на 10 %. В результате к одному сроку первая бригада вспахала на 14 га больше второй бригады. Сколько гектаров вспахала каждая к этому сроку?
4. Петя живет в девятиэтажном доме. Он спускается на лифте со своего этажа на первый за 1 минуту. Из – за маленького роста Петя не достает до кнопки своего этажа. Поэтому, поднимаясь вверх, он нажимает ту кнопку, до которой может дотянуться, а дальше идет пешком. Весь путь вверх занимает 1 минута 10 секунд. Лифт движется вверх и вниз с одинаковой скоростью, а Петя поднимается вдвое медленнее лифта. На каком этаже живет Петя?
5. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена медиана CD. Через ее конец – точку D проведена прямая, перпендикулярная к медиане, до пересечения с катетом AC в точке E и продолжением катета BC в точке F. Отрезок EF в точке M разделен пополам. Точка M соединена с точкой C. Доказать, что  $CM \perp AB$ .
6. В конкурсе участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трех исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причем за Петуха и Ворону было в сумме дано 15 голосов, за Ворону и Кукушку – 18 голосов. За Кукушку и Петуха – 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырех названных чисел отличается от правильного не более, чем на 13. Сколько судей проголосовало за Ворону?

**VIII городской чемпионат по математическим боям****«Бои по правилам» (1/4 финала)**

1. Доказать тождество:  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ , если  $a + b + c = 0$ .
2. Петя в конце четверти выписал подряд в строчку свои текущие оценки по физике и поставил между некоторыми из них знак ( $\cdot$ ). Произведение получилось равным 2007. Какая оценка выходит за четверть у Пети? («колов» учитель физики не ставит)
3. Три бригады начали одновременную пахоту. Установленная планом ежедневная норма первой бригады так относится к норме второй бригады, как 5 : 4, а второй к третьей, как 2 к 1,5. Первая бригада увеличила ежедневную норму на 10 %, вторая на 20 %, а третья, как и первая, на 10 %. В результате к одному сроку первая бригада вспахала на 14 га больше второй бригады. Сколько гектаров вспахала каждая к этому сроку?
4. Петя живет в девятиэтажном доме. Он спускается на лифте со своего этажа на первый за 1 минуту. Из – за маленького роста Петя не достает до кнопки своего этажа. Поэтому, поднимаясь вверх, он нажимает ту кнопку, до которой может дотянуться, а дальше идет пешком. Весь путь вверх занимает 1 минута 10 секунд. Лифт движется вверх и вниз с одинаковой скоростью, а Петя поднимается вдвое медленнее лифта. На каком этаже живет Петя?
5. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена медиана CD. Через ее конец – точку D проведена прямая, перпендикулярная к медиане, до пересечения с катетом AC в точке E и продолжением катета BC в точке F. Отрезок EF в точке M разделен пополам. Точка M соединена с точкой C. Доказать, что  $CM \perp AB$ .
6. В конкурсе участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трех исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причем за Петуха и Ворону было в сумме дано 15 голосов, за Ворону и Кукушку – 18 голосов. За Кукушку и Петуха – 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырех названных чисел отличается от правильного не более, чем на 13. Сколько судей проголосовало за Ворону?

**VIII городской чемпионат по математическим боям**

**«Бои по правилам» (1/4 финала)**

1. Доказать тождество:  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ , если  $a + b + c = 0$ .  
**Решение:**  $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) = (a + b + c)((a + b)^2 - (a + b)c + c^2) - 3ab(a + b) = -3ab(a + b) = 3abc$ ;  $a + b = -c$ .

2. Петя в конце четверти выписал подряд в строчку свои текущие оценки по физике и поставил между некоторыми из них знак ( $\cdot$ ). Произведение получилось равным 2007. Какая оценка выходит за четверть у Пети? («колов» учитель физики не ставит)

**Ответ:** 3

**Решение:**  $2007 = 3 \cdot 3 \cdot 223$ . Отсюда можно сделать вывод, что отметки Пети – две двойки и три тройки. Надо еще доказать, что нет других вариантов отметок.  $2007 = 9 \cdot 223 = 3 \cdot 669$ . Поскольку 9 – это не отметка, эти разложения не могли возникнуть из Петиных отметок. Т.к. «3» больше, чем «2» и последняя отметка, как ни переставляя множители – тройка, можно надеяться, что «3» в четверти он получит.

3. Три бригады начали одновременную пахоту. Установленная планом ежедневная норма первой бригады так относится к норме второй бригады, как 5 : 4, а второй к третьей, как 2 к 1,5. Первая бригада увеличила ежедневную норму на 10 %, вторая на 20 %, а третья, как и первая, на 10 %. В результате к одному сроку первая бригада вспахала на 14 га больше второй бригады. Сколько гектаров вспахала каждая к этому сроку?

**Решение:** I : II = 5 : 4; II : III = 2 : 1,5 = 4 : 3; отсюда I : II : III = 5 : 4 : 3.

- 1)  $5 + 5 \cdot 0,1 = 5,5$  частей составляет новая ежедневная норма I бригады.
  - 2)  $4 + 4 \cdot 0,2 = 4,8$  части приходится ежедневно на новую норму II бригады.
  - 3)  $3 + 3 \cdot 0,1 = 3,3$  части ежедневной нормы III бригады.  
Теперь I : II : III = 5,5 : 4,8 : 3,3 = 55 : 48 : 33.
  - 4)  $55 - 48 = 7$ (частей) составляют 14 га.
  - 5)  $(14 \cdot 55) : 7 = 110$  (га) вспахала первая бригада.
  - 6)  $(14 \cdot 48) : 7 = 96$  (га) вспахала вторая бригада.
  - 7)  $(14 \cdot 33) : 7 = 66$  (га) вспахала третья бригада.
4. Петя живет в девятиэтажном доме. Он спускается на лифте со своего этажа на первый за 1 минуту. Из – за маленького роста Петя не достает до кнопки своего этажа. Поэтому, поднимаясь вверх, он нажимает ту кнопку, до которой может дотянуться, а дальше идет пешком. Весь путь вверх занимает 1 минута 10 секунд. Лифт движется вверх и вниз с

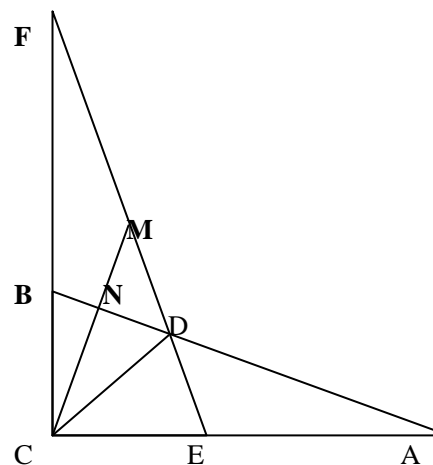
одинаковой скоростью, а Петя поднимается вдвое медленнее лифта. На каком этаже живет Петя?

**Решение:** Рассмотрим ту часть пути, когда Петя вниз едет на лифте, а вверх идет пешком. С одной стороны, путь пешком занимает вдвое больше времени, а с другой – больше на 10 секунд. Значит эту часть пути лифт проезжает за 10 секунд, а Петя проходит за 20 секунд. Поэтому весь путь на лифте занимает 60 секунд, то Петя проходит 1/6 пути. При этом он поднимается на целое число промежутков между этажами. Дом девятиэтажный, значит, это один промежуток, а на лифте Петя проезжает 5. Следовательно, он живет на 7 этаже.

5. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена медиана CD. Через ее конец – точку D проведена прямая, перпендикулярная к медиане, до пересечения с катетом AC в точке E и продолжением катета BC в точке F. Отрезок EF в точке M разделен пополам. Точка M соединена с точкой C. Доказать, что  $CM \perp AB$ .

**Решение:**

В прямоугольном треугольнике FCE,  $MF = MC$ , следовательно, в треугольнике FCE  $\angle FCM = \angle F$ ,  $\angle DCE = \angle A$ . (Как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). В треугольнике ABC из того, что  $CD = AD$ , следует  $\angle DCE = \angle A$ . Следовательно,  $\angle FCM = \angle A$ . В треугольнике ABC  $\angle ABC = \angle CBN = 90^\circ - \angle A$ . В треугольнике CBN  $\angle BNC = 180^\circ - (\angle FCN + \angle CBN)$ . Из предыдущих равенств  $\angle BNC = 180^\circ - (\angle A + 90^\circ - \angle A) = 90^\circ$ , т.е.  $CM \perp AB$ .



6. В конкурсе участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трех исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причем за Петуха и Ворону было в сумме дано 15 голосов, за Ворону и Кукушку – 18 голосов. За Кукушку и Петуха – 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырех названных чисел отличается от правильного не более, чем на 13. Сколько судей проголосовало за Ворону?

**Ответ:** 13.

**Решение:**  $P + V = 15 \Rightarrow P$  и  $V$  не может быть больше  $15 + 13 = 28$

$V + K = 18 \Rightarrow V$  и  $K$  не может быть больше  $18 + 13 = 31$ .

$K + P = 20$ .

$P + V \leq 28$ ,  $V + K \leq 18 + 13 = 31$ ,  $K + P \leq 20 + 13 = 33$ .

$(28 + 31 + 33) : 2 = 46$ . (делим на 2, т.к. голос учитывается дважды). С другой стороны, из первого объявления дятла, оно не меньше  $59 - 13 = 46$ . Тем самым, членов жюри равно 46, а все неравенства превращаются в равенства. Число голосов за ворону можно найти  $46 - 33 = 13$ .